

**MODEL DINAMIK INTERAKSI ANTARA VEKTOR
TERINFEKSI LEPTOSPIROSIS DAN POPULASI MANUSIA**

TUGAS AKHIR

Disusun sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh

MUHAMMAD RIZAL
10854004574



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013**

MODEL DINAMIK ITERAKSI ANTARA VEKTOR TERINFEKSI LEPTOSPIROSIS DAN POPULASI MANUSIA

MUHAMMAD RIZAL
10854004574

Tanggal Sidang : 23 Mei 2013
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas model penyebaran penyakit Leptospirosis. Model ini merupakan gabungan dua model nonlinear pada populasi manusia dan vektor. Hasil yang diperoleh yaitu jika $R_0 \geq 1$ dan $Q_2 > \frac{S_1 b_1}{\sim_h}$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal, dan selanjutnya titik kesetimbangan endemik penyakit selalu stabil asimtotik lokal. Ditunjukkan juga bahwa jika $Q_2 Q_3 > \}_h x_h$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global.

Kata Kunci : Leptospirosis, Model Matematika, Kestabilan Titik Kesetimbangan, Fungsi Lyapunov.

***MODELING DYNAMICAL INTERACTIONS BETWEEN
LEPTOSPIROSIS INFECTED VECTOR AND HUMAN
POPULATION***

MUHAMMAD RIZAL
108540004574

Date of Final Exam : 23 Mei 2013
Graduation Ceremony Period:

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This Thesis discusses about model the spread of infectious diseases Leptospirosis. This model is combine two nonlinear models of human populations and vektor. The result obtained that is if $R_0 \geq 1$ and $Q_2 > \frac{S_1 b_1}{\sim_h}$ disease-free equilibrium is locally asymptotic stable, and than endemic equilibrium is always locally asymptotic stable. Also show that is if $Q_2 Q_3 > \}_h x_h$ disease-free equilibrium is global asymptotiac stable.

Key word : *Leptospirosis, Mathematical Models, Stability Equilibrium, Lyapunov Function.*

KATA PENGANTAR

Puji beserta syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **“Model Dinamik Interaksi antara Vektor Terinfeksi Leptospirosis dan Populasi Manusia”**. Shalawat beserta salam kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat-sahabat, serta para pengikut beliau. Mudah-mudahan kita termasuk kepada golongan umat beliau yang mendapat syafa’at-Nya di akhirat kelak. amin...

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, nasehat, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama sekali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tuaku tersayang yang selalu mendo’kan, memberikan motivasi dan kasih sayang. Semoga Allah SWT selalu merahmati mereka, serta memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat. amin...

Selanjutnya penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Drs. Abu Anwar, M.Ag selaku Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak memberikan bantuan, meluangkan banyak waktu kepada penulis, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabaran dalam penulisan Tugas Akhir ini.
6. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

7. Bapak M. Nizam Muhaijir, S.Si selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini hingga selesai.
8. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Penasehat Akademik yang telah banyak membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
9. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing penulis selama kuliah.
10. Orang tuaku Syahdan dan Syamsidar yang telah memberikan banyak kasih sayang kepada penulis dan juga membantu baik moril maupun materil.
11. Kakak dan abangku (Indra Yani dan Santoso) yang telah banyak membantu penulis baik moril maupun materil.
12. Adik-adikku tersayang (M. Muslih, Siti Jumiah, M. Jumali, Eva Nofianti, Syahrul, dan Yuliza Hidayah) yang telah banyak membantu penulis baik moril maupun materil.
13. Teman-temanku Yuzi, Ise, Dedi, Agus, Hary, Fikos, Lizar, Siti, Silvia, Olif dan Devi yang telah membantu penulis dengan semangat dan do'a.
14. Seluruh teman di jurusan Matematika angkatan 2008, kakak dan adik tingkat angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.

semoga amal kebaikan yang mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin...

Penulis sangat menyadari dalam penulisan Tugas Akhir ini masih banyak kekurangan dan kesalahan, oleh karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 23 Mei 2013

Penulis,

Muhammad Rizal

DAFTAR ISI

	Halaman
COVER	1
KATA PENGANTAR	2
ABSTRAK	4
<i>ABSTRACT</i>	5
DAFTAR ISI.....	6
DAFTAR SIMBOL.....	8
DAFTAR GAMBAR	9
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	10
2.2 Rumusan Masalah	11
2.3 Batasan Masalah	11
2.4 Tujuan Penelitian.....	11
2.5 Sistematika Penulisan.....	11
 BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Leptospirosis.....	13
2.1.1 Pengertian.....	13
2.1.2 Cara Penularan	14
2.1.3 Gejala Klinis	15
2.1.4 Penangan dan Pencegahan	16
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	17
2.3 Titik Keseimbangan	18
2.4 Kestabilan Titik Keseimbangan	18
2.5 Fungsi Lyapunov	22
 BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	26
 BAB IV PEMBAHASAN DAN HASIL	
4.1 Asumsi dan Parameter dalam Model.....	28
4.2 Model Dinamik Interaksi antara Vektor Terinfeksi Leptospirosis dan Populasi Manusia	30
4.3 Titik Keseimbangan (<i>equilibrium</i>)	33
4.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	35
4.3.2 Titik Keseimbangan Endemik Penyakit.....	39
4.4 Kestabilan Titik Keseimbangan	42
4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	43
4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik Penyakit.....	45
4.4.3 Kestabilan Global Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	50

4.5 Simulasi	50
BAB V PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	52
5.2 Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Leptospirosis merupakan masalah kesehatan masyarakat di seluruh dunia, khususnya di negara-negara yang beriklim tropis dan subtropis serta memiliki curah hujan yang tinggi. WHO menyebutkan kejadian Leptospirosis untuk negara subtropis adalah berkisar antara 0,1-1 kejadian tiap 100.000 penduduk per tahun, sedangkan di negara tropis berkisar antara 10-100 kejadian tiap 100.000 penduduk per tahun (Masniari Poloengan dan Iyep Komala, *Artikel Penelitian IPB*).

Leptospirosis disebabkan oleh bakteri *Leptospira Interrogans* patogen pada manusia dan hewan. Gejala dini Leptospirosis umumnya adalah demam, sakit kepala parah, nyeri otot, gerah, muntah dan mata merah. Penderita Leptospirosis lanjut bisa menderita penyakit Weil, seperti: gagal ginjal, sakit kuning (menguningnya kulit yang menandakan penyakit hati) dan perdarahan masuk ke kulit dan selaput lendir, bahkan bisa menyebabkan pembengkakan selaput otak.

Banyak model telah diusulkan untuk mempelajari penyebaran penyakit tersebut. Pongsumpun dkk (2008) dalam jurnal yang berjudul “*Age Structural Transmission Model for Leptospirosis*”, jurnal tersebut mengembangkan model matematika untuk mempelajari perilaku penyakit leptospirosis pada manusia dan tikus. Populasi manusia dibagi lagi menjadi dua utama, kelompok remaja dan orang dewasa. Rujira Kongnuy (2012) dalam jurnal yang berjudul “*Local Stability of Equilibria: Leptospirosis*”, mengembangkan model penularan penyakit leptospirosis pada manusia dan tikus, yang mana populasi manusia dan tikus hanya tertular oleh tikus yang terinfeksi penyakit.

Perkembangan selanjutnya Gul Zaman dkk (2012) dalam jurnalnya yang berjudul “*Modeling Dynamical Interactions between Leptospirosis Infected Vector and Human Population*”, yaitu suatu model interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia dengan mengkombinasikan antara

dua model nonlinear dari populasi manusia dan vektor. Berbekal dari penelitian yang dilakukan oleh Gul Zaman dkk, maka penulis tertarik untuk mengulas jurnal tersebut, sehingga Tugas Akhir ini berjudul “**Model Dinamik Interaksi antara Vektor Terinfeksi Leptospirosis dan Populasi Manusia**”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penyelesaian Tugas Akhir ini yaitu:

- a. Bagaimana menentukan model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia?
- b. Bagaimana menganalisa kestabilan titik kesetimbangan model?

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan Tugas Akhir ini lebih terarah, maka penulis membatasi permasalahan pada model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini yaitu:

- a. Mendapatkan model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia.
- b. Mengetahui kestabilan titik kesetimbangan model.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yaitu sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan landasan teori, seperti: pengertian Leptospirosis, pemodelan matematika, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, serta fungsi Lyapunov.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi Leptospirosis dan populasi manusia.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang pembentukan model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia serta analisa terhadap model.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari pembahasan dan saran-saran untuk pembaca.

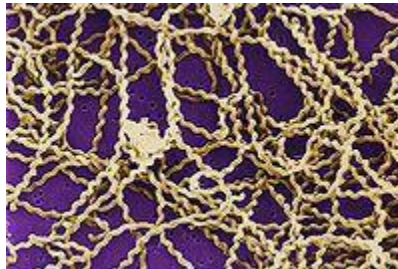
BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Leptospirosis

2.1.1 Pengertian

Leptospirosis adalah penyakit zoonosis yang disebabkan oleh infeksi bakteri yang berbentuk spiral dari genus *Leptospira*, yang menyerang hewan dan manusia. Penelitian tentang leptospirosis pertama dilakukan oleh Adolf Heil pada Tahun 1886. Dia melaporkan adanya penyakit tersebut pada manusia dengan gambaran klinis demam, pembesaran hati dan limpa, ikterus dan ada tanda-tanda kerusakan pada ginjal (Masniari Poloengan dan Iyep Komala, *Artikel Penelitian IPB*). Sampai saat ini dikenal dua spesies *Leptospira* yaitu, *Leptospira interrogans* dan *Leptospira biflexa*. Spesies pertama dikenal patogen terhadap manusia dan hewan, sedangkan spesies kedua merupakan saprofit yang hidup bebas di perairan dangkal dan jarang dijumpai infeksi pada manusia.



Gambar 2.1 Bakteri *Leptospira* menggunakan mikroskop elektron tipe *scanning*

Sumber :<http://id.wikipedia.org/wiki/Leptospirosis>

2.1.2 Cara Penularan

Penularan bakteri *Leptospira* terjadi dengan dua cara, yaitu:

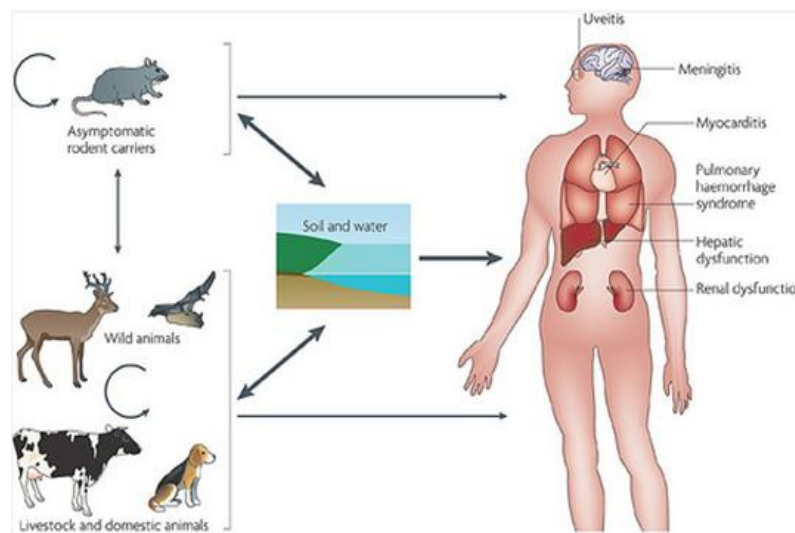
a. Penularan secara langsung

Penularan secara langsung dapat terjadi melalui darah, urin atau cairan tubuh lain yang mengandung kuman leptospira masuk kedalam tubuh pejamu. Dari hewan ke manusia merupakan penyakit akibat pekerjaan, terjadi pada

orang yang merawat hewan atau menangani organ tubuh hewan, misalnya pekerja potong hewan atau seseorang yang tertular dari hewan peliharaan. Dari manusia ke manusia meskipun jarang, dapat terjadi melalui hubungan seksual atau dari ibu penderita leptospirosis ke janin melalui sawar plasenta dan air susu ibu.

b. Penularan tidak langsung

Penularan tidak langsung dapat terjadi melalui genangan air, sungai, danau, selokan saluran air, lumpur dan tempat pembuangan sampah yang tercemar bakteri *Leptospira*.



Gambar 2.2 Siklus penyebaran bakteri *Leptospira*

Sumber: <http://www.dautic.com/penyebab-dan-gejala-penyakit-leptospirosis.html>

Penularan bakteri *Leptospira* bisa melalui tikus, babi, sapi, kambing, kuda, anjing, serangga, burung, landak, kelelawar dan tupai. Kebanyakan penularannya disebabkan oleh tikus. Infeksi oleh *Leptospira* umumnya didapat karena kontak kulit atau selaput lendir (*mucous membrane*) misalnya, mata (*konjuktiva*) karena kecipratan selaput lendir vagina atau lecet-lecet kulit dengan urin atau cemaran oleh keluaran urogenitalis lainnya atau mengkonsumsi makanan dan minuman yang tercemar oleh bakteri tersebut.

2.1.3 Gejala Klinis

Gejala dan tanda yang ditimbulkan tergantung kepada berat ringannya infeksi yang dapat dibedakan menjadi tiga stadium, yaitu:

a. Stadium Pertama

Pada stadium ini ditandai dengan beberapa gejala seperti: demam, menggigil, sakit kepala, malaise, muntah, konjungtivitis, rasa nyeri pada otot terutama otot betis dan punggung. Gejala-gejala tersebut akan tampak antara 4-9 hari.

b. Stadium Kedua

Pada stadium ini biasanya telah terbentuk antibodi di dalam tubuh penderita, gejala-gejala yang tampak pada stadium ini lebih bervariasi dibanding pada stadium pertama antara lain: ikterus (kekuningan), apabila demam dan gejala-gejala lain timbul lagi, besar kemungkinan akan terjadi meningitis. Biasanya stadium ini terjadi antara minggu kedua dan keempat.

c. Stadium Ketiga

Pada stadium ini komplikasi leptospirosis dapat menimbulkan gejala-gejala berikut: pada ginjal; renal failure yang dapat menyebabkan kematian, pada mata; konjungtiva yang tertutup menggambarkan fase septisemi yang erat hubungannya dengan keadaan fotobia dan konjungtiva *hemorrhagic*, pada hati; *jaundice* (kekuningan) yang terjadi pada hari keempat dan keenam dengan adanya pembesaran hati dan konsistensi lunak, pada jantung; aritmia, kegagalan jantung yang dapat menyebabkan kematian mendadak, pada paru-paru; *hemorrhagic pneumonitis* dengan batuk darah, nyeri dada, *respiratory distress* dan *cyanosis*, pendarahan karena adanya kerusakan pembuluh darah (*vascular damage*) dari saluran pernapasan, saluran pencernaan, ginjal dan saluran genitalia, infeksi pada kehamilan menyebabkan abortus, lahir mati, premature dan kecacatan pada bayi (Masniari Poloengan dan Iyep Komala, *Artikel Penelitian IPB*).

2.1.3 Penanganan dan Pencegahan

Penanganan dini sangat membantu, karena bakteri *Leptospira* mudah mati dengan antibiotik yang banyak dijumpai di Toko Obat seperti *Penicillin* dan turunannya *Amoxylline*, *Streptomycine*, *Tetracycline*, *Erithtromycine*. Bila terjadi komplikasi atau gejala yang lebih parah segera berobat ke dokter, karena bila terlambat ditangani maka akan berakibat fatal atau kematian dimana angka kematian akibat bakteri ini bisa mencapai 20%.

Pencegahan dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu:

1. Membiasakan diri dengan Perilaku Hidup Bersih dan Sehat (PHBS)
2. Menyimpan makanan dan minuman dengan baik agar terhindar dari tikus.
3. Mencucui tangan dengan sabun sebelum makan.
4. Mencucui tangan, kaki serta bagian tubuh lainnya dengan sabun setelah bekerja di sawah/ kebun/ sampah/ tanah/ selokan dan tempat-tempat yang tercemar lainnya.
5. Melindungi pekerja yang berisiko tinggi terhadap leptospirosis (petugas kebersihan, petani, petugas pemotong hewan, dan lain-lain) dengan menggunakan sepatu bot dan sarung tangan.
6. Menjaga kebersihan lingkungan
7. Membersihkan tempat-tempat air dan kolam renang.
8. Menghindari adanya tikus di dalam rumah/gedung.
9. Menghindari pencemaran oleh tikus.
10. Melakukan desinfeksi terhadap tempat-tempat tertentu yang tercemar oleh tikus
11. Meningkatkan penangkapan tikus.
12. Menjaga stamina tubuh, dengan rajin berolahraga.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Di bawah ini diberikan sistem persamaan diferensial yang linear dan nonlinear.

Didefinisikan:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i : E \rightarrow R^n$, f_i adalah fungsi kontinu pada E , dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Diberikan sistem persamaan diferensial autonomous:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

sistem (2.1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sistem (2.2) dikatakan linear jika f_1, f_2, \dots, f_n masing-masing linear dalam x_1, x_2, \dots, x_n . Sebaliknya disebut sistem persamaan diferensial nonlinear.

jika Sistem (2.2) linear, maka Sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

selanjutnya Sistem (2.3) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax$$

dengan A matriks ukuran $n \times n$, dan $x \in E$.

Solusi Sistem (2.1) diberikan oleh Definisi (2.1) berikut ini:

Definisi 2.1 (Perko, 1991)

Diberikan $E \subseteq R^n$, E himpunan terbuka, dan $f_i \in C(E, R)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vektor $x(t) \in R^n$ disebut penyelesaian Sistem (2.1) pada interval I jika $x(t)$ diferensiabel pada I dan $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$.

2.3 Titik Keseimbangan (*Equilibrium*)

Suatu sistem dinamik dikatakan setimbang jika sistem tidak berubah sepanjang waktu. Secara formal titik keseimbangan (*equilibrium*) dari Sistem (2.1) didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Perko, 1991)

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik keseimbangan (*equilibrium*) Sistem (2.1) jika $f(\hat{x}) = 0$.

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik penyakit. Titik keseimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik keseimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

2.4 Kestabilan Titik Keseimbangan (*Equilibrium*)

Konsep perilaku sistem pada titik keseimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik keseimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Di bawah ini definisi formal mengenai kestabilan titik keseimbangan:

Definisi 2.3 (Hale, 1991)

Titik keseimbangan (*equilibrium*) $\hat{x} \in R^n$ dari Sistem (2.1) dikatakan:

- a) Stabil lokal jika untuk setiap $v > 0$ terdapat $u > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.1) $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < u$ maka berakibat $\|x(t) - \hat{x}\| < v$ untuk setiap $t \geq t_0$.
- b) Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $u_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < u_0$ maka berakibat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$.
- c) Tidak stabil jika titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$ tak memenuhi (a).

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi Sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\hat{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\hat{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

Sifat kestabilan titik *equilibrium* Sistem (2.1) dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik \hat{x} . Berikut ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik \hat{x} .

Definisi 2.4 (Hale, 1991)

Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada Sistem (2.1) dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x .

Setelah ditentukan matriks Jacobian, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Berikut definisi mengenai metode linearisasi:

Definisi 2.5 (Perko, 1991)

Sistem $\dot{x} = J(f(\hat{x}))$ disebut linearisasi Sistem (2.1) di \hat{x} .

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$, sifat kestabilan titik *equilibrium* \hat{x} dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.6 (Wiggins, 1990)

Titik *equilibrium* \hat{x} disebut titik *equilibrium* hiperbolik jika semua nilai eigen $J(f(\hat{x}))$ mempunyai bagian real tak nol.

Kestabilan dari titik *equilibrium* pada Sistem (2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik \hat{x} . Kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada Sistem (2.1) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini:

Teorema 2.1 (Hale, 1991)

- a) Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(\hat{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik *equilibrium* \hat{x} dari Sistem (2.1) stabil asimtotik.
- b) Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\hat{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik *equilibrium* \hat{x} dari Sistem (2.1) tidak stabil.

Berikut ini diberikan contoh mengenai kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dua variabel terikat.

pandang Sistem linear:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

dengan a , b , c dan d konstan.

misalkan λ nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.5)$$

berdasarkan persamaan (2.5) di atas, diperoleh:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \text{ atau } \lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas Sistem (2.4) dapat diterangkan sebagai berikut:

- I. $\lambda_{1,2}$ real dan berbeda jika $D = p^2 - 4q > 0$,
 - 1) $\lambda_{1,2}$ sama tanda jika $q > 0$:
 - a) $\lambda_{1,2}$ semua positif jika $p > 0$ tidak stabil.
 - b) $\lambda_{1,2}$ semua negatif jika $p < 0$ stabil.
 - 2) $\lambda_{1,2}$ beda tanda, jika $q < 0$ tidak stabil.
 - 3) Salah satu dari $\lambda_{1,2}$ nol, jika $q = 0$.
 - a) Akar lainnya positif jika $p > 0$ tidak stabil.
 - b) Akar lainnya negatif jika $p < 0$ stabil netral.
- II. $\lambda_{1,2}$ real dan sama jika $D = 0$,
 - 1) $\lambda_{1,2}$ sama tanda:
 - a) $\lambda_{1,2}$ keduanya positif jika $p > 0$ tidak stabil.
 - b) $\lambda_{1,2}$ keduanya negatif jika $p < 0$ stabil.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0$ tidak stabil.

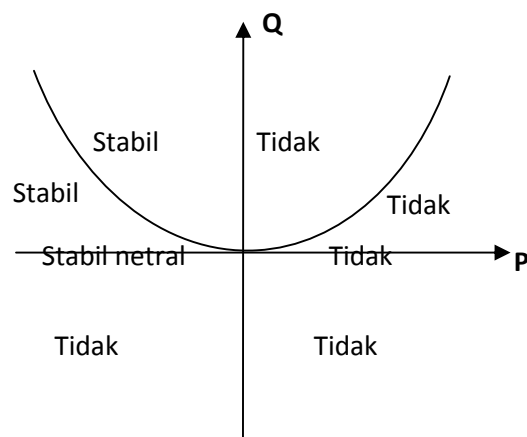
III. $\lambda_{1,2}$ kompleks jika $D < 0$,

1) $\text{Re } \lambda_{1,2}$ sama tanda:

a) $\text{Re } \lambda_{1,2}$ semua positif jika $p > 0$ tidak stabil.

b) $\text{Re } \lambda_{1,2}$ semua negatif jika $p < 0$ stabil.

2) $\text{Re } \lambda_{1,2}$ jika $p = 0$ stabil netral



Gambar 2.3 Bidang fase sistem linier

2.5 Fungsi Lyapunov

Metode Lyapunov adalah salah satu metode untuk menganalisa kestabilan (sistem linear maupun nonlinear), dikenal sebagai metode Lyapunov pertama dan metode Lyapunov kedua (langsung). Metode Lyapunov kedua adalah metode yang digunakan untuk menentukan kestabilan sistem, tanpa menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear sistem.

Dasar pemikiran dari metode Lyapunov kedua dalam menyelidiki kelakuan sistem dinamis berkaitan erat dengan energi dari sistem tersebut, jika laju perubahan $\frac{d\Phi(x)}{dt}$ dengan $\Phi(x)$ merupakan energi dari suatu sistem dinamis adalah negatif untuk setiap x , kecuali dalam keadaan setimbang \hat{x} , energi akan terus menurun sampai akhirnya mencapai keadaan minimum $\Phi(\hat{x})$. Dengan kata lain, sistem akan stabil saat berada pada titik kesetimbangannya, ini

merupakan konsep stabilitas. Pada Tahun 1892 Lyapunov menunjukkan bahwa fungsi-fungsi tertentu lainnya (selain energi) juga dapat digunakan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium.

Pertimbangkan kembali Sistem (2.1), dengan $\hat{x} \in E$ merupakan titik ekuilibrium Sistem (2.1). Diberikan fungsi $V : E \rightarrow R^n$ diferensiabel kontinu pada $E \in R^n$. Turunan V terhadap t pada Sistem (2.1) dinotasikan dengan \dot{V} adalah:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)\end{aligned}$$

turunan V terhadap t pada Sistem (2.1) sangat bergantung pada persamaan sistem. Oleh karena itu, \dot{V} akan berbeda untuk sistem yang berbeda. Fungsi V disebut fungsi Lyapunov jika memenuhi pernyataan berikut:

- $V(\hat{x}) = 0$ untuk $\hat{x} \in E$ dengan $x = \hat{x}$.
- $V(x) > 0$ dengan $x \neq \hat{x}$.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E$.

Teorema 2.2 (Khalil, 1996)

Diberikan \hat{x} merupakan titik ekuilibrium Sistem (2.1). Jika terdapat fungsi Lyapunov $V : R^n \rightarrow R$, $V \in C^1(R^n)$ dan $V(x) > 0$ untuk $x \in R^n$ dengan $x \neq \hat{x}$ dan $V(\hat{x}) = 0$ dengan $x = \hat{x}$, dengan:

- $V(x) \rightarrow \infty$ untuk $|x| \rightarrow \infty$,
- $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in R^n$, dan
- $S = \{x \in R^n : \dot{V}(x) = 0\}$ tidak memuat solusi lain kecuali titik ekuilibrium \hat{x} , maka \hat{x} stabil asimtotik global.

Berikut contoh penggunaan fungsi Lyapunov:

Contoh 2.2:

Diberikan Sistem persamaan differensial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dagger - \dots x - xz \\ \dot{y} &= xz - y - yw \\ \dot{z} &= y - \prec z \\ \dot{w} &= xy - Sw\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $w(0)=0$; $(x, y, z, w) \geq 0$; konstanta

$\dagger, \dots, \prec, x, S > 0$; dan diberikan titik ekuilibrium $\hat{E} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{w}) = \left(\frac{\dagger}{\dots}, 0, 0, 0\right)$.

Diberikan fungsi Lyapunov pada $\Omega = \{(x, y, z, w) \in R^4 : (x, y, z, w) \geq 0\}$; dengan $\hat{x} < \prec$, yaitu:

$$V(t) = \frac{1}{2}(x - \hat{x})^2 + (2\prec - \hat{x})\left(y + z + \frac{1}{2x}w^2\right)\tag{2.8}$$

dari persamaan (2.8) tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned}V'(t) &= (x - \hat{x})(\dagger - \dots x - xz) + (2\prec - \hat{x})(xz - y - yw) + (2\prec - \hat{x})(y - \prec z) \\ &\quad + \left(\frac{2\prec}{x}w - \frac{\hat{x}}{x}w\right)(xy - Sw) \\ &= \dagger x - \dots x^2 - x^2 z - \dagger \hat{x} + \dots \hat{x}x + \hat{x}xz + 2\prec xz - 2\prec y - 2\prec yw - \hat{x}xz + \hat{x}y + \hat{x}yw \\ &\quad + 2\prec y - 2\prec^2 z - \hat{x}y + \prec \hat{x}z + 2\prec yw - \frac{2\prec S}{x}w^2 - \hat{x}yw + \frac{S\hat{x}}{x}w^2 \\ &= \dagger x - \dots x^2 - x^2 z - \dagger \hat{x} + \dots \hat{x}x + 2\prec xz - 2\prec^2 z + \prec \hat{x}z - \frac{2\prec S}{x}w^2 + \frac{S\hat{x}}{x}w^2\end{aligned}$$

dengan mengganti nilai $\hat{x} = \frac{\dagger}{\dots}$, diperoleh:

$$\begin{aligned}&= \dots \hat{x}x - \dots x^2 - x^2 z - \dots \hat{x}^2 + \dots \hat{x}x + 2\prec xz - 2\prec^2 z + \prec \hat{x}z - \frac{2\prec S}{x}w^2 + \frac{S\hat{x}}{x}w^2 \\ &= -\dots x^2 - x^2 z - \dots \hat{x}^2 + 2\dots \hat{x}x + 2\prec xz - 2\prec^2 z + \prec \hat{x}z - \frac{2\prec S}{x}w^2 + \frac{S\hat{x}}{x}w^2 \\ &= -\dots x^2 + 2\dots \hat{x}x - \dots \hat{x}^2 - x^2 z + 2\prec xz - 2\prec^2 z + \prec \hat{x}z - \frac{2\prec S}{x}w^2 + \frac{S\hat{x}}{x}w^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\dots(x^2 - 2\hat{x}x + \hat{x}^2) - \left((x^2 - 2\varsigma x + \varsigma^2) + (\varsigma^2 - \varsigma\hat{x})\right)z - \frac{S}{\chi}(2\varsigma + \hat{x})w^2 \\
&= -\dots(x - \hat{x})^2 - \left((x - \varsigma)^2 + \varsigma(\varsigma - \hat{x})\right)z - \frac{S}{\chi}(2\varsigma + \hat{x})w^2
\end{aligned}$$

karena $z \geq 0$ dan $\hat{x} < \varsigma$, sehingga $\dot{V} \leq 0$ untuk setiap $(x, y, z, w) \in \Omega$, dan $\dot{V} = 0$ dipenuhi jika dan hanya jika $x = \hat{x}$, $y = z = w = 0$. Sehingga berdasarkan Teorema (2.2), \hat{E} stabil asimtotik global pada Ω .

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah studi kepustakaan. Adapun langkah-langkah dalam penulisan yaitu:

- a Menentukan asumsi dan parameter yang diperlukan.

Pada model yang akan dibentuk diasumsikan bahwa:

- 1) Penyakit fatal pada infeksi tertentu, sehingga dalam populasi terjadi kematian alami maupun kematian yang disebabkan oleh penyakit.
- 2) Individu yang sembuh pada populasi manusia tidak kebal terhadap penyakit, artinya kemungkinan akan kembali ke kelompok rentan.
- 3) Populasi manusia tertular dengan dua cara, yaitu oleh manusia terinfeksi atau vektor terinfeksi. Sedangkan populasi vektor hanya tertular oleh manusia terinfeksi.

Sedangkan parameter yang digunakan yaitu:

- 1) Laju *recruitment* pada populasi manusia dinyatakan dengan (b_1) , sedangkan laju *recruitment* pada populasi vektor dinyatakan dengan (b_2) .
- 2) Laju penularan manusia yang rentan oleh manusia terinfeksi dinyatakan dengan (S_1) , sedangkan laju penularan manusia yang rentan oleh vektor terinfeksi dinyatakan dengan (S_2) .
- 3) Laju kematian alami pada populasi manusia dinyatakan dengan (\sim_h) , sedangkan laju kematian akibat penyakit pada populasi manusia dinyatakan dengan (u_h) .
- 4) Laju kesembuhan pada populasi manusia dinyatakan dengan (x_h) , sedangkan laju perpindahan individu yang sembuh ke kelompok rentan pada populasi manusia dinyatakan dengan $(\}_h)$.
- 5) Laju penularan vektor yang rentan oleh manusia terinfeksi dinyatakan dengan (S_3) .

- 6) Laju kematian alami pada populasi vektor dinyatakan dengan (x_v) , sedangkan laju kematian akibat penyakit pada populasi vektor dinyatakan dengan (u_v) .
- b Menentukan model matematika.
Dengan menggunakan asumsi-asumsi dan parameter-parameter pada poin (a), dapat ditentukan model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia.
- c Menentukan titik kesetimbangan model.
Berdasarkan model matematika yang telah dibuat, kemudian ditentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*), yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.
- d Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan.
Setelah ditentukan titik kesetimbangan, selanjutnya menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut menggunakan matriks Jakobian untuk kestabilan lokal dan fungsi Lyapunov untuk kestabilan global.
- e Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik kesetimbangan.

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan dari ilmu matematika yang dapat mendeskripsikan beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk matematis, dengan tujuan untuk lebih mempermudah menyelesaikan suatu permasalahan tersebut. Pemodelan matematika juga digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dalam suatu populasi, khususnya penyakit menular seperti Leptospirosis. Leptospirosis merupakan penyakit yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Leptospira*, yang menyerang hewan dan manusia.

Dimisalkan bahwa pada populasi manusia, $S_h(t)$ menyatakan jumlah manusia yang rentan pada saat t , $I_h(t)$ menyatakan jumlah manusia yang terinfeksi pada saat t , dan $R_h(t)$ menyatakan jumlah manusia yang sembuh pada saat t . Jika $N_h(t)$ menyatakan jumlah populasi manusia pada saat t , maka $N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$. Sedangkan pada populasi vektor, $S_v(t)$ menyatakan jumlah vektor rentan pada saat t , dan $I_v(t)$ menyatakan jumlah vektor yang terinfeksi pada saat t . Jika $N_v(t)$ menyatakan jumlah populasi vektor pada saat t , maka $N_v(t) = S_v(t) + I_v(t)$.

4.1 Asumsi dan Parameter dalam Model

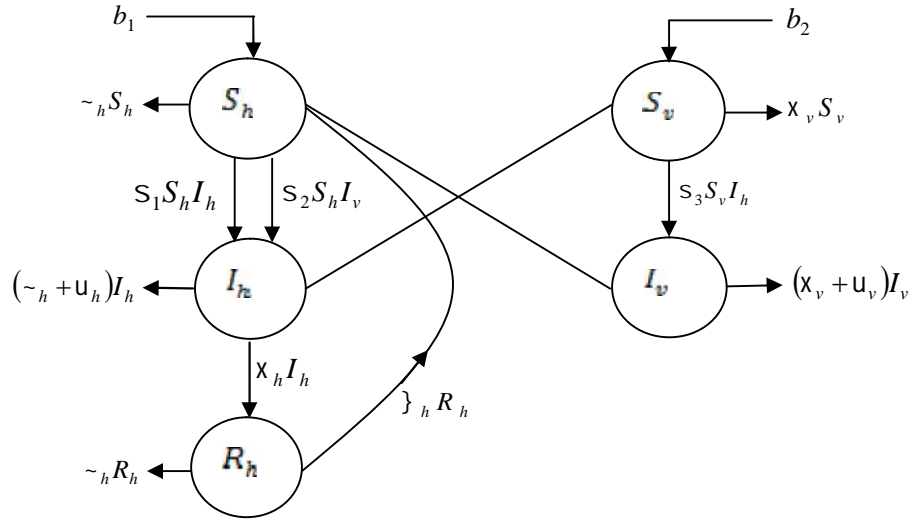
Untuk membentuk model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia, diperlukan asumsi dan parameter yang diberikan sebagai berikut:

- a. Asumsi-asumsi yang diperlukan dalam membentuk model yaitu:
 - 1) Penyakit fatal pada infeksi tertentu, sehingga dalam populasi terjadi kematian alami maupun kematian yang disebabkan oleh penyakit.
 - 2) Individu yang sembuh pada populasi manusia tidak kebal terhadap penyakit, artinya kemungkinan akan kembali ke kelompok rentan.

- 3) Populasi manusia tertular dengan dua cara, yaitu oleh manusia terinfeksi atau vektor terinfeksi. Sedangkan populasi vektor hanya tertular oleh manusia terinfeksi.
- b. Parameter yang diperlukan dalam membentuk model yaitu:
- 1) Laju *recruitment* pada populasi manusia dinyatakan dengan (b_1) , sedangkan laju *recruitment* pada populasi vektor dinyatakan dengan (b_2) .
 - 2) Laju penularan manusia yang rentan oleh manusia terinfeksi dinyatakan dengan (s_1) , sedangkan laju penularan manusia yang rentan oleh vektor terinfeksi dinyatakan dengan (s_2) .
 - 3) Laju kematian alami pada populasi manusia dinyatakan dengan (\sim_h) , sedangkan laju kematian akibat penyakit pada populasi manusia dinyatakan dengan (u_h) .
 - 4) Laju kesembuhan pada populasi manusia dinyatakan dengan (x_h) , sedangkan laju perpindahan individu yang sembuh ke kelompok rentan pada populasi manusia dinyatakan dengan $(\}_h)$.
 - 5) Laju penularan vektor yang rentan oleh manusia terinfeksi dinyatakan dengan (s_3) .
 - 6) Laju kematian alami pada populasi vektor dinyatakan dengan (x_v) , sedangkan laju kematian akibat penyakit pada populasi vektor dinyatakan dengan (u_v) .

4.2 Model Dinamik Interaksi antara Vektor Terinfeksi Leptospirosis dan Populasi Manusia

Berdasarkan asumsi dan parameter yang telah ditentukan dan untuk mempermudah dalam pembentukan model, maka diperlukan diagram alir berikut ini:



Gambar 4.1 Diagram alir model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi Leptospirosis dan populasi manusia

Berdasarkan diagram alir pada Gambar (4.1), dengan memisalkan $Q_1 = u_v - x_v$, $Q_2 = \tilde{I}_h + u_h + x_h$, $Q_3 = \tilde{I}_h + }_h$ diperoleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= b_1 - \tilde{S}_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + }_h R_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= x_h I_h - Q_3 R_h \\
 \frac{dS_v}{dt} &= b_2 - x_v S_v - S_3 S_v I_h \\
 \frac{dI_v}{dt} &= S_3 S_v I_h - Q_1 I_v
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan nilai awal,

$$S_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, R_h(0) \geq 0, S_v(0) \geq 0, I_v(0) \geq 0 \tag{4.2}$$

daerah penyelesaiannya adalah:

$$\Omega = \left\{ (S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \in R^5 : (S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \geq 0; N_h \leq \frac{b_1}{\tilde{S}_h}; N_v \leq \frac{b_2}{x_v} \right\}$$

Berdasarkan Sistem (4.1), jumlah populasi manusia keseluruhan yaitu,

$$N_h = S_h + I_h + R_h$$

$$\begin{aligned}\frac{dN_h}{dt} &= \frac{dS_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} \\ &= b_1 - \gamma_h S_h - \sigma_2 S_h I_v - \sigma_1 S_h I_h + \gamma_h R_h + \sigma_2 S_h I_v + \sigma_1 S_h I_h - Q_2 I_h + \chi_h I_h - Q_3 R_h \\ &= b_1 - \gamma_h S_h - \gamma_h I_h - \gamma_h R_h - u_h I_h \\ &= b_1 - \gamma_h (S_h + I_h + R_h) - u_h I_h \\ &= b_1 - \gamma_h N_h - u_h I_h\end{aligned}$$

dari penyelesaian di atas diperoleh:

$$\frac{dN_h}{dt} \leq b_1 - \gamma_h N_h \quad (4.3)$$

Persamaan (4.3) dapat ditulis:

$$\frac{dN_h}{dt} + \gamma_h N_h \leq b_1 \quad (4.4)$$

dari Persamaan (4.4), diperoleh:

$$N_h \leq N_h(0)e^{-\gamma_h t} + \frac{b_1}{\gamma_h}(1 - e^{-\gamma_h t}) \quad (4.5)$$

dari persamaan (4.5) dapat dijelaskan bahwa untuk t membesar maka

$\lim_{t \rightarrow \infty} N_h(t) \leq \frac{b_1}{\gamma_h}$, artinya jumlah populasi manusia akan menuju kapasitas batas $\frac{b_1}{\gamma_h}$.

Jika $N_h(0) > \frac{b_1}{\gamma_h}$, maka $N_h(t)$ turun monoton menuju kapasitas batas $\frac{b_1}{\gamma_h}$ dan jika

$N_h(0) < \frac{b_1}{\gamma_h}$, maka $N_h(t)$ naik monoton menuju kapasitas batas $\frac{b_1}{\gamma_h}$.

Jumlah populasi vektor keseluruhan yaitu,

$$N_v = S_v + I_v$$

$$\begin{aligned}\frac{dN_v}{dt} &= \frac{dS_v}{dt} + \frac{dI_v}{dt} \\ &= b_2 - \chi_v S_v - \sigma_3 S_v I_h + \sigma_3 S_v I_h - Q_1 I_v \\ &= b_2 - \chi_v S_v - \chi_v I_v - u_v I_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_2 - x_v (S_v + I_v) - u_v I_v \\
&= b_2 - x_v N_v - u_v I_v
\end{aligned}$$

dari penyelesaian di atas diperoleh:

$$\frac{dN_v}{dt} \leq b_2 - x_v N_v \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) dapat ditulis:

$$\frac{dN_v}{dt} + x_v N_v \leq b_2 \quad (4.7)$$

dari Persamaan (4.7), diperoleh:

$$N_v \leq N_v(0)e^{-x_v t} + \frac{b_2}{x_v}(1 - e^{-x_v t}) \quad (4.8)$$

dari Persamaan (4.8) dapat dijelaskan bahwa untuk t membesar maka

$\lim_{t \rightarrow \infty} N_v(t) \leq \frac{b_2}{x_v}$, artinya jumlah populasi vektor akan menuju kapasitas batas $\frac{b_2}{x_v}$.

Jika $N_v(0) > \frac{b_2}{x_v}$, maka $N_v(t)$ turun monoton menuju kapasitas batas $\frac{b_2}{x_v}$ dan jika

$N_v(0) < \frac{b_2}{x_v}$, maka $N_v(t)$ naik monoton menuju kapasitas batas $\frac{b_2}{x_v}$.

4.3 Titik Keseimbangan (*Equilibrium*)

Titik keseimbangan Sistem (4.1) dapat ditentukan dalam dua keadaan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit artinya tidak ada individu yang terserang penyakit dan titik keseimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terserang penyakit dalam populasi.

Didefinisikan:

$$R_0 = \frac{b_1(S_2 S_3 b_2 + x_v Q_1 S_1)}{\sim_h x_v Q_1 Q_2} \quad (4.9)$$

Berikut ini dijelaskan titik keseimbangan Sistem (4.1),

4.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada penyakit. Untuk mendapatkan titik keseimbangan Sistem (4.1), maka masing-

masing persamaan pada Sistem (4.1) diberi nilai nol, sehingga Sistem (4.1) menjadi:

$$\begin{aligned}
b_1 - \sim_h S_h - \mathfrak{S}_2 S_h I_v - \mathfrak{S}_1 S_h I_h + \mathfrak{J}_h R_h &= 0 \\
\mathfrak{S}_2 S_h I_v + \mathfrak{S}_1 S_h I_h - Q_2 I_h &= 0 \\
\mathfrak{X}_h I_h - Q_3 R_h &= 0 \\
b_2 - \mathfrak{X}_v S_v - \mathfrak{S}_3 S_v I_h &= 0 \\
\mathfrak{S}_3 S_v I_h - Q_1 I_v &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Penyakit tidak terjadi dalam populasi jika $I_h = I_v = 0$, keadaan tersebut menyebabkan $R_h = 0$, maka dari persamaan pertama pada Sistem (4.10) diperoleh S_h yaitu:

$$\begin{aligned}
b_1 - \sim_h S_h - \mathfrak{S}_2 S_h I_v - \mathfrak{S}_1 S_h I_h + \mathfrak{J}_h R_h &= 0 \\
b_1 - \sim_h S_h &= 0 \\
-\sim_h S_h &= -b_1 \\
S_h &= \frac{b_1}{\sim_h}
\end{aligned}$$

sehingga S_h untuk titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $S_h^0 = \frac{b_1}{\sim_h}$.

Selanjutnya dari persamaan keempat pada Sistem (4.10) diperoleh S_v pada titik kesetimbangan bebas penyakit:

$$\begin{aligned}
b_2 - \mathfrak{X}_v S_v - \mathfrak{S}_3 S_v I_h &= 0 \\
b_2 - \mathfrak{X}_v S_v &= 0 \\
-\mathfrak{X}_v S_v &= -b_2 \\
S_v &= \frac{b_2}{\mathfrak{X}_v}
\end{aligned}$$

sehingga S_v untuk titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $S_v^0 = \frac{b_2}{\mathfrak{X}_v}$.

Berdasarkan penyelesaian tersebut, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $E^0 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = \left(\frac{b_1}{\sim_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\mathfrak{X}_v}, 0 \right)$.

4.3.2 Titik Keseimbangan Endemik Penyakit

Titik keseimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I_h > 0$ dan $I_v > 0$, dari persamaan ketiga pada Sistem (4.10) diperoleh:

$$\begin{aligned}x_h I_h - Q_3 R_h &= 0 \\-Q_3 R_h &= -x_h I_h \\R_h &= \frac{x_h}{Q_3} I_h\end{aligned}$$

sehingga R_h untuk titik keseimbangan endemik penyakit adalah $R_h^* = \frac{x_h}{Q_3} I_h^*$.

Dari persamaan keempat pada Sistem (4.10) diperoleh:

$$\begin{aligned}b_2 - x_v S_v - S_3 S_v I_h &= 0 \\b_2 - (x_v + S_3 I_h) S_v &= 0 \\-(x_v + S_3 I_h) S_v &= -b_2 \\S_v &= \frac{b_2}{x_v + S_3 I_h}\end{aligned}$$

sehingga S_v untuk titik keseimbangan endemik penyakit adalah $S_v^* = \frac{b_2}{x_v + S_3 I_h^*}$.

Dari persamaan kelima pada Sistem (4.10) diperoleh:

$$\begin{aligned}S_3 S_v I_h - Q_1 I_v &= 0 \\-Q_1 I_v &= -S_3 S_v I_h \\I_v &= \frac{S_3 S_v I_h}{Q_1} \\&= \frac{S_3 \left(\frac{b_2}{x_v + S_3 I_h} \right) I_h}{Q_1} \\&= \frac{\left(\frac{S_3 b_2 I_h}{x_v + S_3 I_h} \right)}{Q_1} \\&= \frac{S_3 b_2 I_h}{Q_1 (x_v + S_3 I_h)}\end{aligned}$$

sehingga I_v untuk titik kesetimbangan endemik penyakit adalah

$$I_v^* = \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)}.$$

Dari persamaan kedua pada Sistem (4.10) diperoleh:

$$S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h = 0$$

$$(S_2 I_v + S_1 I_h) S_h - Q_2 I_h = 0$$

$$(S_2 I_v + S_1 I_h) S_h = Q_2 I_h$$

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{Q_2 I_h}{S_2 I_v + S_1 I_h} \\ &= \frac{Q_2 I_h}{S_2 \left(\frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)} \right) + S_1 I_h} \\ &= \frac{Q_2 I_h}{\left(\frac{S_2 S_3 b_2 I_h + Q_1 S_1 I_h (\chi_v + S_3 I_h)}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h)} \right)} \\ &= \frac{Q_2 I_h}{\left(\frac{(S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h)) I_h}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h)} \right)} \\ &= \frac{Q_2}{\left(\frac{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h)}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h)} \right)} \\ &= \frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + S_3 I_h)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h)} \end{aligned}$$

sehingga S_h^* untuk titik kesetimbangan endemik penyakit adalah

$$S_h^* = \frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)}.$$

Berdasarkan penyelesaian di atas, diperoleh titik kesetimbangan endemik

$$\text{penyakit } E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*).$$

$$= \left(\frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)}, I_h^*, \frac{\chi_h}{Q_3}, \frac{b_2}{\chi_v + S_3 I_h^*}, \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)} \right).$$

dikarenakan R_h dalam kasus endemik penyakit tidak terlalu berpengaruh, maka dapat diabaikan. Sehingga titik kesetimbangan endemik penyakit menjadi:

$$E^* = (S_h^*, I_h^*, S_v^*, I_v^*). \\ = \left(\frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)}, I_h^*, \frac{b_2}{\chi_v + S_3 I_h^*}, \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)} \right).$$

4.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan (*equilibrium*)

Kestabilan titik kesetimbangan artinya menyelidiki apakah titik kesetimbangan yang diperoleh stabil atau tidak stabil pada Sistem (4.1), dalam hal ini akan diselidiki dua macam kestabilan titik kesetimbangan yaitu, kestabilan lokal dan kestabilan global.

Kestabilan lokal artinya menyelidiki kestabilan di sekitar titik kesetimbangan, dijelaskan dalam uraian berikut:

Misalkan:

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 - \gamma_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \beta_h R_h \\ f_2 &= S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h \\ f_3 &= \chi_h I_h - Q_3 R_h \\ f_4 &= b_2 - \chi_v S_v - S_3 S_v I_h \\ f_5 &= S_3 S_v I_h - Q_1 I_v \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kemudian dapatkan matriks Jacobiannya dengan cara masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap masing-masing variabel pada fungsi tersebut, yaitu:

a. Fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel S_h :

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_h} = \frac{\partial (b_1 - \gamma_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \beta_h R_h)}{\partial S_h} = -\gamma_h - S_2 I_v - S_1 I_h$$

b. Fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel I_h :

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_h} = \frac{\partial (b_1 - \gamma_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \beta_h R_h)}{\partial I_h} = -S_1 S_h$$

c. Fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel R_h :

$$\frac{\partial f_1}{\partial R_h} = \frac{\partial(b_1 - \sim_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \} _h R_h)}{\partial R_h} = \} _h$$

d. Fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel S_v :

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_v} = \frac{\partial(b_1 - \sim_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \} _h R_h)}{\partial S_v} = 0$$

e. Fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel I_v :

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_v} = \frac{\partial(b_1 - \sim_h S_h - S_2 S_h I_v - S_1 S_h I_h + \} _h R_h)}{\partial I_v} = -S_2 S_h$$

f. Fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel S_h :

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_h} = \frac{\partial(S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h)}{\partial S_h} = S_2 I_v + S_1 I_h$$

g. Fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel I_h :

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_h} = \frac{\partial(S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h)}{\partial I_h} = S_1 S_h - Q_2$$

h. Fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel R_h :

$$\frac{\partial f_2}{\partial R_h} = \frac{\partial(S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h)}{\partial R_h} = 0$$

i. Fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel S_v :

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_v} = \frac{\partial(S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h)}{\partial S_v} = 0$$

j. Fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel I_v :

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_v} = \frac{\partial(S_2 S_h I_v + S_1 S_h I_h - Q_2 I_h)}{\partial I_v} = S_2 S_h$$

k. Fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel S_h :

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_h} = \frac{\partial(x_h I_h - Q_3 R_h)}{\partial S_h} = 0$$

l. Fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel I_h :

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_h} = \frac{\partial(x_h I_h - Q_3 R_h)}{\partial I_h} = x_h$$

m. Fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel R_h :

$$\frac{\partial f_3}{\partial R_h} = \frac{\partial(x_h I_h - Q_3 R_h)}{\partial R_h} = -Q_3$$

- n. Fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel S_v :

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_v} = \frac{\partial(x_h I_h - Q_3 R_h)}{\partial S_v} = -Q_3$$

- o. Fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel I_v :

$$\frac{df_3}{dI_v} = \frac{d(x_h I_h - Q_3 R_h)}{dI_v} = 0$$

- p. Fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel S_h :

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_h} = \frac{\partial(b_2 - x_v S_v - s_3 S_v I_h)}{\partial S_h} = 0$$

- q. Fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel I_h :

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_h} = \frac{\partial(b_2 - x_v S_v - s_3 S_v I_h)}{\partial I_h} = -s_3 S_v$$

- r. Fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel R_h :

$$\frac{\partial f_4}{\partial R_h} = \frac{\partial(b_2 - x_v S_v - s_3 S_v I_h)}{\partial R_h} = 0$$

- s. Fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel S_v :

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_v} = \frac{\partial(b_2 - x_v S_v - s_3 S_v I_h)}{\partial S_v} = -x_v - s_3 I_h$$

- t. Fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel I_v :

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_v} = \frac{\partial(b_2 - x_v S_v - s_3 S_v I_h)}{\partial I_v} = 0$$

- u. Fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel S_h :

$$\frac{\partial f_5}{\partial S_h} = \frac{\partial(s_3 S_v I_h - Q_1 I_v)}{\partial S_h} = 0$$

- v. Fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel I_h :

$$\frac{\partial f_5}{\partial I_h} = \frac{\partial(s_3 S_v I_h - Q_1 I_v)}{\partial I_h} = s_3 S_v$$

- w. Fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel R_h :

$$\frac{\partial f_5}{\partial R_h} = \frac{\partial (S_3 S_v I_h - Q_1 I_v)}{\partial R_h} = 0$$

x. Fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel S_v :

$$\frac{\partial f_5}{\partial S_v} = \frac{\partial (S_3 S_v I_h - Q_1 I_v)}{\partial S_v} = S_3 I_h$$

y. Fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel I_v :

$$\frac{\partial f_5}{\partial I_v} = \frac{\partial (S_3 S_v I_h - Q_1 I_v)}{\partial I_v} = -Q_1$$

Bentuk umum matriks jacobian Sistem (4.1) adalah:

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_h} & \frac{\partial f_1}{\partial I_h} & \frac{\partial f_1}{\partial R_h} & \frac{\partial f_1}{\partial S_v} & \frac{\partial f_1}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_h} & \frac{\partial f_2}{\partial I_h} & \frac{\partial f_2}{\partial R_h} & \frac{\partial f_2}{\partial S_v} & \frac{\partial f_2}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_h} & \frac{\partial f_3}{\partial I_h} & \frac{\partial f_3}{\partial R_h} & \frac{\partial f_3}{\partial S_v} & \frac{\partial f_3}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_h} & \frac{\partial f_4}{\partial I_h} & \frac{\partial f_4}{\partial R_h} & \frac{\partial f_4}{\partial S_v} & \frac{\partial f_4}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_h} & \frac{\partial f_5}{\partial I_h} & \frac{\partial f_5}{\partial R_h} & \frac{\partial f_5}{\partial S_v} & \frac{\partial f_5}{\partial I_v} \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan turunan parsial masing-masing fungsi tersebut, diperoleh matriks jacobian berikut:

$$J(f) = \begin{bmatrix} -\gamma_h - S_2 I_v - S_1 I_h & -S_1 S_h & \gamma_h & 0 & -S_2 S_h \\ S_2 I_v + S_1 I_h & S_1 S_h - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v & 0 & -\gamma_v - S_3 I_h & 0 \\ 0 & S_3 S_v & 0 & S_3 I_h & -Q_1 \end{bmatrix}$$

4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit,

$$E^0 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = \left(\frac{b_1}{\gamma_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\gamma_v}, 0 \right).$$

Kestabilan lokal titik keseimbangan bebas penyakit artinya memeriksa kestabilan di sekitar titik E^0 pada Sistem (4.1). Dalam memeriksa kestabilan lokal untuk titik keseimbangan bebas penyakit menggunakan matriks Jacobian.

Teorema 4.1:

Untuk $R_0 \geq 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit E^0 pada Sistem (4.1) stabil asimtotik lokal jika $Q_2 > \frac{S_1 b_1}{\sim_h}$.

Bukti:

Berdasarkan matriks Jacobian di atas, maka matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan bebas penyakit atau $J(f(E^0))$ menjadi:

$$J(f(E^0)) = \begin{bmatrix} -\sim_h - S_2 I_v^0 - S_1 I_h^0 & -S_1 S_h^0 & \} _h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ S_2 I_v^0 + S_1 I_h^0 & S_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & x_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -x_v - S_3 I_h^0 & 0 \\ 0 & S_3 S_v^0 & 0 & S_3 I_h^0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \} _h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & S_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & x_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -x_v & 0 \\ 0 & S_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

dengan melakukan beberapa OBE pada matriks Jacobian di atas, diperoleh:

$$J(f(E^0)) = \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \} _h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & S_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & x_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -x_v & 0 \\ 0 & S_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_3 \times S_3 S_v^0 \\ r_5 + \left(-\frac{S_3 S_v^0}{S_1 S_h^0 - Q_2} \right) r_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \} _h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & S_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & x_h S_3 S_v^0 & -Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -x_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 - \frac{S_2 S_3 S_h^0 S_v^0}{S_1 S_h^0 - Q_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} r_5 \times S_1 S_h^0 - Q_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \}_h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & S_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & \chi_h S_3 S_v^0 & -Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -\chi_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 (S_1 S_h^0 - Q_2) - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{bmatrix}$$

dimisalkan, $M_1 = S_1 S_h^0 - Q_2$ matriks diatas menjadi,

$$= \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \}_h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & \chi_h S_3 S_v^0 & -Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -\chi_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1 Q_1 - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari determinan $(\}_I - J(f(E^0))) = 0$, untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian bebas penyakit.

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \}_h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & \chi_h S_3 S_v^0 & -Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -\chi_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1 Q_1 - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \}_ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \}_ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \}_ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \}_ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \}_ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sim_h & -S_1 S_h^0 & \}_h & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & \chi_h S_3 S_v^0 & -Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 S_v^0 & 0 & -\chi_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1 Q_1 - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \}_ + \sim_h & S_1 S_h^0 & -\}_h & 0 & S_2 S_h^0 \\ 0 & \}_ - M_1 & 0 & 0 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & -\chi_h S_3 S_v^0 & \}_ + Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 S_v^0 & 0 & \}_ + \chi_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \}_ + M_1 Q_1 + S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left\{ + \sim_h \begin{vmatrix} \} - M_1 & 0 & 0 & -S_2 S_h^0 \\ -x_h S_3 S_v^0 & \} + Q_3 S_3 S_v^0 & 0 & 0 \\ S_3 S_v^0 & 0 & \} + x_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \} + M_1 Q_1 + S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{vmatrix} \right| = 0$$

$$\left(\} + \sim_h \right) \left(\} + Q_3 S_3 S_v^0 \right) \begin{vmatrix} \} - M_1 & 0 & -S_2 S_h^0 \\ S_3 S_v^0 & \} + x_v & 0 \\ 0 & 0 & \} + M_1 Q_1 + S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\} + \sim_h \right) \left(\} + Q_3 S_3 S_v^0 \right) \left(\} + x_v \right) \begin{vmatrix} \} - M_1 & -S_2 S_h^0 \\ 0 & \} + M_1 Q_1 + S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 \end{vmatrix} = 0$$

dari determinan tersebut diperoleh persamaan karakteristik $(\} + \sim_h)(\} + Q_3 S_3 S_v^0)(\} + x_v)(\} - M_1)(\} + M_1 Q_1 + S_2 S_3 S_h^0 S_v^0) = 0$, sehingga nilai eigen-nilai eigennya diperoleh sebagai berikut: $\}_1 = -\sim_h < 0$, $\}_2 = -Q_3 S_3 S_v^0 < 0$, $\}_3 = -x_v < 0$, $\}_4 = M_1$, $\}_5 = -M_1 Q_1 - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0$.

Berdasarkan nilai eigen tersebut, dapat dijelaskan bahwa $\}_4 < 0 \Leftrightarrow M_1 < 0 \Leftrightarrow S_1 S_h^0 - Q_2 < 0$, dengan mengganti nilai S_h^0 diperoleh:

$$S_1 \frac{b_1}{\sim_h} - Q_2 < 0 \Leftrightarrow Q_2 > S_1 \frac{b_1}{\sim_h} = \frac{S_1 b_1}{\sim_h}.$$

Selanjutnya, $\}_5 < 0 \Leftrightarrow -M_1 Q_1 - S_2 S_3 S_h^0 S_v^0 < 0$, dengan mengganti nilai M_1 , S_h^0 , dan S_v^0 diperoleh:

$$\begin{aligned} & - \left(S_1 \frac{b_1}{\sim_h} - Q_2 \right) Q_1 - S_2 S_3 \frac{b_1}{\sim_h} \frac{b_2}{x_v} < 0 \Leftrightarrow - \left(\frac{S_1 b_1}{\sim_h} - Q_2 \right) Q_1 - \frac{S_2 S_3 b_1 b_2}{\sim_h x_v} < 0 \\ \Leftrightarrow & - \frac{Q_1 S_1 b_1}{\sim_h} + Q_1 Q_2 - \frac{S_2 S_3 b_1 b_2}{\sim_h x_v} < 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) dikalikan dengan $\sim_h x_v$ diperoleh:

$$\begin{aligned} & -x_v Q_1 S_1 b_1 + \sim_h x_v Q_1 Q_2 - S_2 S_3 b_1 b_2 < 0 \Leftrightarrow -S_2 S_3 b_1 b_2 - x_v Q_1 S_1 b_1 + \sim_h x_v Q_1 Q_2 < 0 \\ \Leftrightarrow & -\sim_h x_v Q_1 Q_2 \left(\frac{S_2 S_3 b_1 b_2 + x_v Q_1 S_1 b_1}{\sim_h x_v Q_1 Q_2} - 1 \right) < 0 \Leftrightarrow -\sim_h x_v Q_1 Q_2 \left(\frac{b_1 (S_2 S_3 b_2 + x_v Q_1 S_1)}{\sim_h x_v Q_1 Q_2} - 1 \right) < 0 \\ \Leftrightarrow & -\sim_h x_v Q_1 Q_2 (R_0 - 1) < 0 \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan Teorema (4.1) dengan $R_0 \geq 1$, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E^0 stabil asimtotik lokal jika $Q_2 > \frac{S_1 b_1}{\sim_h}$.

4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit,

$$E^* = (S_h^*, I_h^*, S_v^*, I_v^*) \\ = \left(\frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + S_1 Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)}, I_h^*, \frac{b_2}{\chi_v + S_3 I_h^*}, \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + S_3 I_h^*)} \right).$$

Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik penyakit artinya memeriksa kestabilan di sekitar titik E^* pada Sistem (4.1). Dalam memeriksa kestabilan lokal untuk titik kesetimbangan endemik penyakit juga menggunakan matriks Jacobian.

Teorema 4.2:

Titik kesetimbangan endemik penyakit E^* pada Sistem (4.1) stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Sama halnya dengan penyelesaian pada titik kesetimbangan bebas penyakit, sehingga diperoleh matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu:

$$J(f(E^*)) = \begin{bmatrix} -\sim_h - S_2 I_v^* - S_1 I_h^* & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ S_2 I_v^* + S_1 I_h^* & S_1 S_h^* - Q_2 & 0 & S_2 S_h^* \\ 0 & -S_3 S_v^* & -\chi_v - S_3 I_h^* & 0 \\ 0 & S_3 S_v^* & S_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -(\sim_h + S_2 I_v^* + S_1 I_h^*) & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ S_2 I_v^* + S_1 I_h^* & S_1 S_h^* - Q_2 & 0 & S_2 S_h^* \\ 0 & -S_3 S_v^* & -\chi_v - S_3 I_h^* & 0 \\ 0 & S_3 S_v^* & S_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}$$

dimisalkan $M_1 = \sim_h + S_2 I_v^* + S_1 I_h^*$ dan $M_2 = S_2 I_v^* + S_1 I_h^*$ dilanjutkan dengan melakukan beberapa OBE pada matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned}
J(f(E^*)) &= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ M_2 & S_1 S_h^* - Q_2 & 0 & S_2 S_h^* \\ 0 & -S_3 S_v^* & -x_v - S_3 I_h^* & 0 \\ 0 & S_3 S_v^* & S_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 + \left(1 - \frac{\gamma_h}{M_1}\right) r_1 \\ r_3 + r_4 \end{matrix} \\
&= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & -Q_2 + \frac{\gamma_h S_1 S_h^*}{M_1} & 0 & \frac{\gamma_h S_2 S_h^*}{M_1} \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & S_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dimisalkan $M_3 = -Q_2 + \frac{\gamma_h S_1 S_h^*}{M_1}$ dan $M_4 = \frac{\gamma_h S_2 S_h^*}{M_1}$ matriks di atas menjadi,

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 & 0 & M_4 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & S_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_4 + \left(\frac{S_3 I_h^*}{x_v}\right) r_3 \end{matrix} \\
&= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 & 0 & M_4 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -Q_1 - \frac{Q_1 S_3 I_h^*}{x_v} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 & 0 & M_4 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -\left(\frac{Q_1 (x_v + S_3 I_h^*)}{x_v}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dimisalkan $M_5 = \frac{Q_1 (x_v + S_3 I_h^*)}{x_v}$ matriks di atas menjadi,

$$= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 & 0 & M_4 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -M_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 + \left(\frac{M_4}{M_5}\right) r_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 + \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -M_5 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari determinan $(\lambda I - J(f(E^*))) = 0$, untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian bebas penyakit.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 + \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -M_5 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -M_1 & -S_1 S_h^* & 0 & -S_2 S_h^* \\ 0 & M_3 + \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_v & -Q_1 \\ 0 & S_3 S_v^* & 0 & -M_5 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \lambda + M_1 & S_1 S_h^* & 0 & S_2 S_h^* \\ 0 & \lambda - M_3 - \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + x_v & Q_1 \\ 0 & -S_3 S_v^* & 0 & \lambda + M_5 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \lambda + M_1 & \lambda - M_3 - \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + x_v & Q_1 & 0 \\ -S_3 S_v^* & 0 & \lambda + M_5 & 0 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ (\lambda + M_1)(\lambda + x_v) \left(\lambda - M_3 - \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} \right) (\lambda + M_5) \right\} = 0$$

dari determinan tersebut diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda + M_1)(\lambda + x_v) \left(\lambda - M_3 - \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} \right) (\lambda + M_5) = 0, \text{ sehingga nilai eigen-nilai}$$

eigennya diperoleh sebagai berikut:, $\lambda_1 = -M_1 < 0$, $\lambda_2 = -\lambda_v < 0$,

$$\lambda_3 = M_3 + \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5}, \quad \lambda_4 = -M_5 < 0.$$

Dari nilai eigen-nilai eigen tersebut dapat dijelaskan bahwa:

$$\begin{aligned} \lambda_3 < 0 &\Leftrightarrow M_3 + \frac{M_4 S_3 S_v^*}{M_5} < 0 \Leftrightarrow \left(-Q_2 + \frac{\sim_h S_1 S_h^*}{M_1} \right) + \frac{\left(\frac{\sim_h S_2 S_h^*}{M_1} \right) S_3 S_v^*}{\left(\frac{Q_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{\lambda_v} \right)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-Q_2 M_1 + \sim_h S_1 S_h^*}{M_1} + \frac{\sim_h \lambda_v S_2 S_3 S_h^* S_v^*}{Q_1 M_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} < 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) di atas dikalikan dengan $Q_1 M_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} &Q_1 (-Q_2 M_1 + \sim_h S_1 S_h^*) (\lambda_v + S_3 I_h^*) + \sim_h \lambda_v S_2 S_3 S_h^* S_v^* < 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda_v Q_1 Q_2 M_1 + \sim_h \lambda_v Q_1 S_1 S_h^* - Q_1 Q_2 S_3 I_h^* M_1 + \sim_h Q_1 S_1 S_3 I_h^* S_h^* + \sim_h \lambda_v S_2 S_3 S_h^* S_v^* < 0 \end{aligned}$$

dengan mengganti nilai M_1 , diperoleh:

$$\begin{aligned} &-\lambda_v Q_1 Q_2 (\sim_h + S_2 I_v^* + S_1 I_h^*) + \sim_h \lambda_v Q_1 S_1 S_h^* - Q_1 Q_2 S_3 I_h^* (\sim_h + S_2 I_v^* + S_1 I_h^*) + \sim_h Q_1 S_1 S_3 I_h^* S_h^* \\ &+ \sim_h \lambda_v S_2 S_3 S_h^* S_v^* < 0 \\ &\Leftrightarrow -\sim_h \lambda_v Q_1 Q_2 - \lambda_v Q_1 Q_2 S_2 I_v^* - \lambda_v Q_1 Q_2 S_1 I_h^* + \sim_h \lambda_v Q_1 S_1 S_h^* - \sim_h Q_1 Q_2 S_3 I_h^* - Q_1 Q_2 S_2 S_3 I_h^* I_v^* \\ &- Q_1 Q_2 S_1 S_3 I_h^{*2} + \sim_h Q_1 S_1 S_3 I_h^* S_h^* + \sim_h \lambda_v S_2 S_3 S_h^* S_v^* < 0 \end{aligned}$$

dengan mengganti nilai S_h^* , S_v^* dan I_v^* diperoleh:

$$\begin{aligned} &-\sim_h \lambda_v Q_1 Q_2 - \lambda_v Q_1 Q_2 S_2 \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} - \lambda_v Q_1 Q_2 S_1 I_h^* + \sim_h \lambda_v Q_1 S_1 \frac{Q_1 Q_2 (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} \\ &- \sim_h Q_1 Q_2 S_3 I_h^* - Q_1 Q_2 S_2 S_3 I_h^* \frac{S_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} - Q_1 Q_2 S_1 S_3 I_h^{*2} + \sim_h Q_1 S_1 S_3 I_h^* \frac{Q_1 Q_2 (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} \\ &+ \sim_h \lambda_v S_2 S_3 \frac{Q_1 Q_2 (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} \left(\frac{b_2}{\lambda_v + S_3 I_h^*} \right) < 0 \\ &\Leftrightarrow -\sim_h \lambda_v Q_1 Q_2 - \frac{\lambda_v Q_1 Q_2 S_2 S_3 b_2 I_h^*}{\lambda_v + S_3 I_h^*} - \lambda_v Q_1 Q_2 S_1 I_h^* + \frac{\sim_h \lambda_v Q_1^2 Q_2 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} - \sim_h Q_1 Q_2 S_3 I_h^* - \frac{Q_1 Q_2 S_2^2 b_2 I_h^{*2}}{\lambda_v + S_3 I_h^*} \\ &- Q_1 Q_2 S_1 S_3 I_h^{*2} + \frac{\sim_h Q_1^2 S_1 S_3 Q_2 I_h^* (\lambda_v + S_3 I_h^*)}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} + \frac{\sim_h \lambda_v Q_1 Q_2 S_2 S_3 b_2}{S_2 S_3 b_2 + Q_1 S_1 (\lambda_v + S_3 I_h^*)} < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Persamaan (4.14) dikalikan dengan $(s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) (x_v + s_3 I_h^*)$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
& -\sim_h x_v Q_1 Q_2 (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) (x_v + s_3 I_h^*) - x_v Q_2 s_2 s_3 b_2 I_h^* (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) \\
& -x_v Q_1 Q_2 s_1 I_h^* (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) (x_v + s_3 I_h^*) + \sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 (x_v + s_3 I_h^*) (x_v + s_3 I_h^*) \\
& -\sim_h Q_1 Q_2 s_3 I_h^* (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) (x_v + s_3 I_h^*) - Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) \\
& -Q_1 Q_2 s_1 s_3 I_h^{*2} (s_2 s_3 b_2 + Q_1 s_1 (x_v + s_3 I_h^*)) (x_v + s_3 I_h^*) + \sim_h Q_1^2 s_1 s_3 Q_2 I_h^* (x_v + s_3 I_h^*) (x_v + s_3 I_h^*) \\
& + \sim_h x_v Q_1 Q_2 s_2 s_3 b_2 (x_v + s_3 I_h^*) < 0 \\
\Leftrightarrow & -\sim_h x_v Q_1 Q_2 (x_v s_2 s_3 b_2 + x_v^2 Q_1 s_1 + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + s_2 s_3^2 b_2 I_h^* + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + Q_1 s_1 s_3^2 I_h^{*2}) \\
& -x_v Q_2 s_2 s_3 b_2 I_h^* (s_2 s_3 b_2 + x_v Q_1 s_1 + Q_1 s_1 s_3 I_h^*) - x_v Q_1 Q_2 s_1 I_h^* (x_v s_2 s_3 b_2 + x_v^2 Q_1 s_1 \\
& + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + s_2 s_3^2 b_2 I_h^* + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + Q_1 s_1 s_3^2 I_h^{*2}) + \sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 (x_v^2 + 2x_v s_3 I_h^* + s_3^2 I_h^{*2}) \\
& -\sim_h Q_1 Q_2 s_3 I_h^* (x_v s_2 s_3 b_2 + x_v^2 Q_1 s_1 + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + s_2 s_3^2 b_2 I_h^* + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + Q_1 s_1 s_3^2 I_h^{*2}) \\
& -Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} (s_2 s_3 b_2 + x_v Q_1 s_1 + Q_1 s_1 s_3 I_h^*) - Q_1 Q_2 s_1 s_3 I_h^{*2} (x_v s_2 s_3 b_2 + x_v^2 Q_1 s_1 \\
& + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + s_2 s_3^2 b_2 I_h^* + x_v Q_1 s_1 s_3 I_h^* + Q_1 s_1 s_3^2 I_h^{*2}) + \sim_h Q_1^2 s_1 s_3 Q_2 I_h^* (x_v^2 + 2x_v s_3 I_h^* \\
& + s_3^2 I_h^{*2}) + \sim_h x_v Q_1 Q_2 s_2 s_3 b_2 (x_v + s_3 I_h^*) < 0 \\
\Leftrightarrow & -\sim_h x_v^2 Q_1 Q_2 s_2 s_3 b_2 - \sim_h x_v^3 Q_1^2 Q_2 s_1 - \sim_h x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1 s_3 I_h^* - \sim_h x_v Q_1 Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^* \\
& -\sim_h x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1 s_3 I_h^* - \sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^2 I_h^{*2} - x_v Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^* - x_v^2 Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3 b_2 I_h^* \\
& -x_v Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} - x_v^2 Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3 b_2 I_h^* - x_v^3 Q_1^2 Q_2 s_1^2 I_h^* - x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3 I_h^{*2} \\
& -x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} - x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3 I_h^{*2} - x_v Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3^2 I_h^{*3} + \sim_h x_v^3 Q_1^2 Q_2 s_1 \\
& + 2\sim_h x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1 s_3 I_h^* + \sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^2 I_h^{*2} - \sim_h x_v Q_1 Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^* - \sim_h x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1 s_3 I_h^* \\
& -\sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^2 I_h^{*2} - \sim_h Q_1 Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} - \sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^2 I_h^{*2} - \sim_h Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^3 I_h^{*3} \\
& -Q_2 s_2^2 s_3^3 b_2 I_h^{*2} - x_v Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} - Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3^3 b_2 I_h^{*3} - x_v Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3^2 b_2 I_h^{*2} \\
& -x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3 I_h^{*2} - x_v Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3^2 I_h^{*3} - Q_1 Q_2 s_1 s_2 s_3^3 b_2 I_h^{*3} - x_v Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3^2 I_h^{*3} \\
& -Q_1^2 Q_2 s_1^2 s_3^3 I_h^{*4} + \sim_h x_v^2 Q_1^2 Q_2 s_1 s_3 I_h^* + 2\sim_h x_v Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^2 I_h^{*2} + \sim_h Q_1^2 Q_2 s_1 s_3^3 I_h^{*3} \\
& + \sim_h x_v^2 Q_1 Q_2 s_2 s_3 b_2 + \sim_h x_v Q_1 Q_2 s_2 s_3^2 b_2 I_h^* < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -I_h^{*4}(Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^3) - I_h^{*3}(\chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 + \sim_h Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^3 + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 + \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 \\
&\quad + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 + \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 - \sim_h Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^3) - I_h^{*2}(\sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^2 + \chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 \\
&\quad + \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3 + \chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3 - \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^2 + \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^2 \\
&\quad + \sim_h Q_1 Q_2 S_2 S_3^3 b_2 + \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^2 + Q_2 S_2^2 S_3^3 b_2^2 + \chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 \\
&\quad + \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3 - 2 \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1 S_3^2) - I_h^*(\sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1 S_3 + \sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1 S_3 \\
&\quad + \chi_v Q_2 S_2^2 S_3^2 b_2^2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \chi_v^3 Q_1^2 Q_2 S_1^2 - 2 \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1 S_3 \\
&\quad + \sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1 S_3 - \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1 S_3 - \sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2) \\
&\quad - (\sim_h \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_2 S_3 b_2 + \sim_h \chi_v^3 Q_1^2 Q_2 S_1 - \sim_h \chi_v^3 Q_1^2 Q_2 S_1 - \sim_h \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_2 S_3 b_2) < 0 \\
&\Leftrightarrow -I_h^{*4}(Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^3) - I_h^{*3}(2\chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 \\
&\quad + \chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2) - I_h^{*2}(\chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + 3\chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + 3\chi_v^2 Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3 \\
&\quad + \sim_h Q_1 Q_2 S_2 S_3^3 b_2 + Q_2 S_2^2 S_3^3 b_2^2) - I_h^*(\sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v Q_2 S_2^2 S_3^2 b_2^2 \\
&\quad + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \chi_v^3 Q_1^2 Q_2 S_1^2) < 0 \\
&\Leftrightarrow -I_h^{*4}[Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^3] - I_h^{*3}\left[2\chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 + \frac{1}{b_1} \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2^2 S_1 S_3^2\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{b_1(S_2 S_3 b_2 + \chi_v Q_1 S_1)}{\sim_h \chi_v Q_1 Q_2}\right)\right] - I_h^{*2}\left[\chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + \frac{3}{b_1} \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2^2 S_1 S_3\left(\frac{b_1(S_2 S_3 b_2 + \chi_v Q_1 S_1)}{\sim_h \chi_v Q_1 Q_2}\right)\right. \\
&\quad \left.+ \sim_h Q_1 Q_2 S_2 S_3^3 b_2 + Q_2 S_2^2 S_3^3 b_2^2\right] - I_h^*\left[\sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v Q_2 S_2^2 S_3^2 b_2^2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2\right. \\
&\quad \left.- I_h^*\left[\sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v Q_2 S_2^2 S_3^2 b_2^2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \frac{1}{b_1} \sim_h \chi_v^3 Q_1^2 Q_2^2 S_1\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left(\frac{b_1(S_2 S_3 b_2 + \chi_v Q_1 S_1)}{\sim_h \chi_v Q_1 Q_2}\right)\right]\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow -I_h^{*4}(Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^3) - I_h^{*3}\left(2\chi_v Q_1^2 Q_2 S_1^2 S_3^2 + Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^3 b_2 + \frac{1}{b_1} \sim_h \chi_v Q_1^2 Q_2^2 S_1 S_3^2 R_0\right) \\
&\quad - I_h^{*2}\left(\chi_v Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3^2 b_2 + \frac{3}{b_1} \sim_h \chi_v^2 Q_1^2 Q_2^2 S_1 S_3 R_0 + \sim_h Q_1 Q_2 S_2 S_3^3 b_2 + Q_2 S_2^2 S_3^3 b_2^2\right) \\
&\quad - I_h^*\left(\sim_h \chi_v Q_1 Q_2 S_2 S_3^2 b_2 + \chi_v Q_2 S_2^2 S_3^2 b_2^2 + \chi_v^2 Q_1 Q_2 S_1 S_2 S_3 b_2 + \frac{1}{b_1} \sim_h \chi_v^3 Q_1^2 Q_2^2 S_1 R_0\right) < 0
\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan Teorema (4.1) maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit E^* stabil asimtotik lokal.

4.4.3 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit,

$$E^0 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = \left(\frac{b_1}{\gamma_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\gamma_v}, 0 \right).$$

Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit artinya memeriksa kestabilan titik E^0 pada Sistem (4.1). Dalam memeriksa kestabilan global untuk titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan fungsi Lyapunov.

Teorema 4.3:

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada Sistem (4.1) stabil asimtotik global jika $Q_2 Q_3 > \gamma_h \gamma_v$.

Bukti:

Diberikan fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$V(t) = Q_3(S_h - S_h^0) + (S_v - S_v^0) + I_v + Q_3 I_h + \gamma_h R_h \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) diturunkan terhadap t , diperoleh:

$$\begin{aligned} V'(t) &= Q_3(b_1 - \gamma_h S_h - \delta_2 S_h I_v - \delta_1 S_h I_h + \gamma_h R_h) + (b_2 - \gamma_v S_v - \delta_3 S_v I_h) \\ &\quad + (\delta_3 S_v I_h - Q_1 I_v) + Q_3(\delta_2 S_h I_v + \delta_1 S_h I_h - Q_2 I_h) + \gamma_h(\gamma_h I_h - Q_3 R_h) \\ &= Q_3 b_1 - \gamma_h Q_3 S_h - Q_3 \delta_2 S_h I_v - Q_3 \delta_1 S_h I_h + \gamma_h Q_3 R_h + b_2 - \gamma_v S_v - \delta_3 S_v I_h \\ &\quad + \delta_3 S_v I_h - Q_1 I_v + Q_3 \delta_2 S_h I_v + Q_3 \delta_1 S_h I_h - Q_2 Q_3 I_h + \gamma_h \gamma_h I_h - \gamma_h Q_3 R_h \\ &= Q_3 b_1 - \gamma_h Q_3 S_h + b_2 - \gamma_v S_v - Q_1 I_v - Q_2 Q_3 I_h + \gamma_h \gamma_h I_h \end{aligned}$$

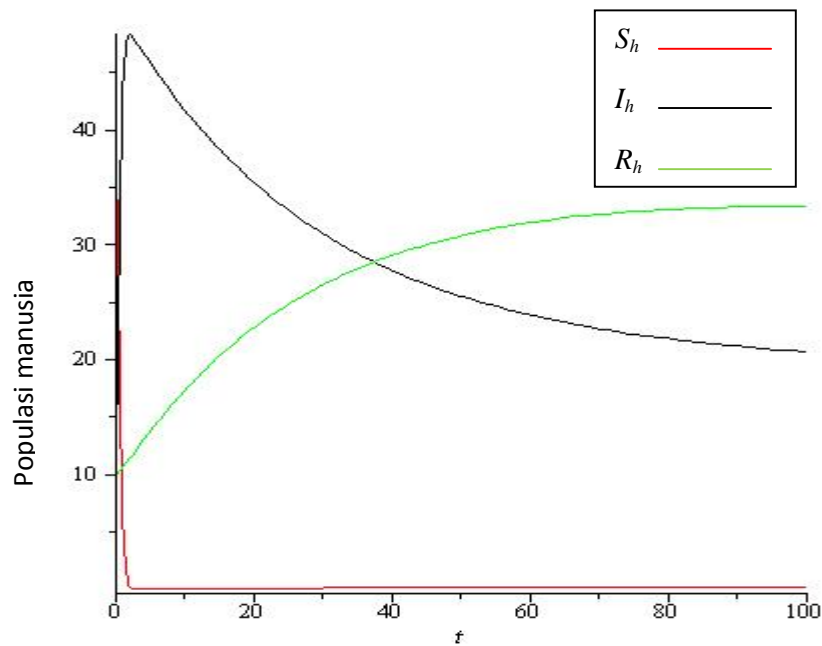
dengan mengganti nilai $b_1 = \gamma_h S_h^0$ dan $b_2 = \gamma_v S_v^0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \gamma_h Q_3 S_h^0 - \gamma_h Q_3 S_h + \gamma_v S_v^0 - \gamma_v S_v - Q_1 I_v - (Q_2 Q_3 - \gamma_h \gamma_h) I_h \\ &= -\gamma_h Q_3 (S_h - S_h^0) - \gamma_v (S_v - S_v^0) - Q_1 I_v - (Q_2 Q_3 - \gamma_h \gamma_h) I_h \end{aligned}$$

dari penyelesaian di atas dapat dijelaskan bahwa, $V'(t) \leq 0 \Leftrightarrow Q_2 Q_3 > \lambda_h x_h$ dan $V'(t) = 0$, hanya terpenuhi bila $S_h = S_h^0, S_v = S_v^0, I_v = I_v^0, I_h = I_h^0, R_h = R_h^0$ sehingga berdasarkan Teorema (4.3) dapat disimpulkan bahwa E^0 stabil asimtotik global pada Ω .

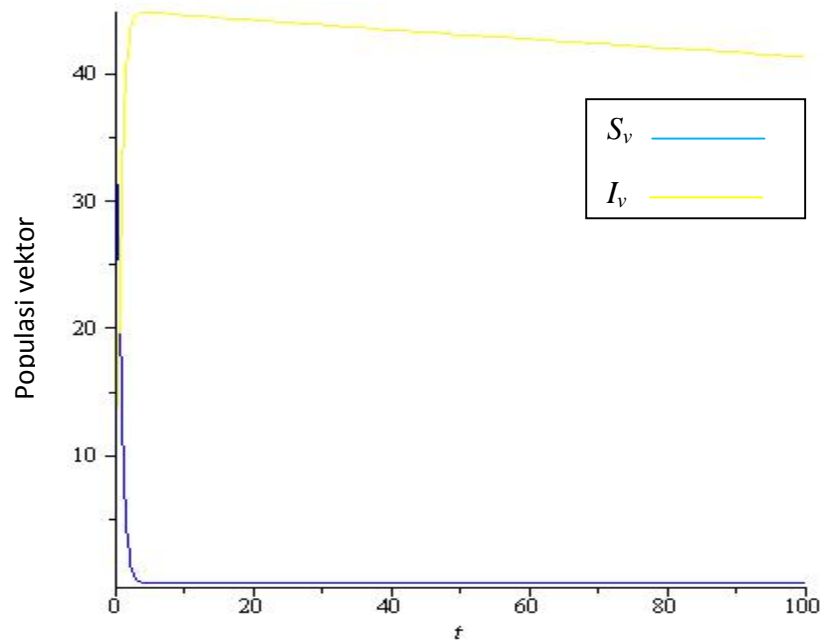
4.5 Simulasi

Dengan mengambil parameter: $b_1 = 0.05$, $b_2 = 0.05$, $s_1 = 0.04$, $s_2 = 0.04$, $s_3 = 0.04$, $\gamma_h = 0.0009$, $u_h = 0.002$, $x_h = 0.021$, $\lambda_h = 0.012$, $x_v = 0.001$, $u_v = 0.001$. Diperoleh $R_0 = 93152.27456$, kemudian substitusikan nilai parameter ke Sistem (4.1), dengan nilai awal $S_h(0) = 40$, $I_h(0) = 10$, $R_h(0) = 10$, $S_v(0) = 35$, $I_v(0) = 10$. Menggunakan Maple13 diperoleh:



Gambar 4.2 Dinamika populasi manusia

Dari gambar di atas dapat dijelaskan bahwa manusia yang rentan mengalami penurunan, manusia yang terinfeksi awalnya mengalami kenaikan namun dalam waktu yang lama mengalami penurunan, sedangkan manusia yang sembuh mengalami kenaikan.



Gambar 4.3 Dinamika populasi vektor

Dari gambar di atas dapat dijelaskan bahwa vektor yang rentan mengalami penurunan, sedangkan vektor yang terinfeksi awalnya mengalami kenaikan namun dalam waktu yang lama mengalami penurunan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

- a. Model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia adalah:

$$\frac{dS_h}{dt} = b_1 - \gamma_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \gamma_h R_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \gamma_h I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \gamma_h R_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \chi_v S_v - \beta_3 S_v I_h$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h - \gamma_v I_v$$

dengan, $Q_1 = \chi_v - \chi_v$, $Q_2 = \gamma_h + \chi_h + \chi_h$, $Q_3 = \gamma_h + \gamma_h$.

nilai awal, $S_h(0) \geq 0$, $I_h(0) \geq 0$, $R_h(0) \geq 0$, $S_v(0) \geq 0$, $I_v(0) \geq 0$

Daerah penyelesaiannya adalah:

$$\Omega = \left\{ (S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \in R^5 : (S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \geq 0; N_h \leq \frac{b_1}{\gamma_h}; N_v \leq \frac{b_2}{\chi_v} \right\}$$

- b. Terdapat dua titik kesetimbangan pada model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia, yaitu:

- 1) Titik kesetimbangan bebas penyakit,

$$E^0 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = \left(\frac{b_1}{\gamma_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\chi_v}, 0 \right)$$

- 2) Titik kesetimbangan endemik penyakit,

$$E^* = (S_h^*, I_h^*, S_v^*, I_v^*) = \left(\frac{Q_1 Q_2 (\chi_v + \beta_3 I_h^*)}{\beta_2 \beta_3 b_2 + Q_1 \beta_1 (\chi_v + \beta_3 I_h^*)}, I_h^*, \frac{b_2}{\chi_v + \beta_3 I_h^*}, \frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\chi_v + \beta_3 I_h^*)} \right).$$

- c. Jika $R_0 \geq 1$ dan $Q_2 > \frac{S_1 b_1}{\gamma_h}$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit E^0 stabil asimtotik lokal.
- d. Titik kesetimbangan endemik penyakit E^* stabil asimtotik lokal.
- e. Jika $Q_2 Q_3 > \gamma_h x_h$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit pada Sistem (4.2) stabil asimtotik global pada Ω .

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini membahas tentang model dinamik interaksi antara vektor terinfeksi leptospirosis dan populasi manusia dengan menggunakan asumsi dan parameter tertentu, untuk itu kepada pembaca disarankan untuk menambahkan asumsi-asumsi lain yang mungkin diperlukan dalam perkembangan model tersebut supaya lebih sempurna.

DAFTAR PUSTAKA

- Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation*. Springer-verlag, New York. 1991.
- Kongnuy, Rujira. Local Stability of Equilibria: Leptospirosis. *Word Akademi of Science, Engineering and Technology*, 66. 2012.
- Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice-hall. Upper Saddle River. NJ. 2nd Edition. 1996.
- Kurdhi, N. A. Analisis Model Dinamika Virus dalam Sel Tubuh dan Pengaruh Respon Imun CTL. *Makalah Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret*. Surakarta.
- Poloengan, Masniari dan Iyep Komala. Mewaspada Leptospirosis di Indonesia Sebagai Penyakit Zoonosis. *Artikel Penelitian Fakultas Peternakan IPB*, Bogor.
- Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-verlag, New York. 1991.
- Pongsuumpun, P. dkk. Age Structural Transmission Model for Leptospirosis, *The Third International Symposium on Biomedical Engineering*, 411-416, 2008.
- Umbari, H. A. Model *SIS* (*Suspectible, Infectives, Suspectible*) dengan Pertumbuhan Alami dan Proses Migrasi. *Tugas Akhir Mahasiswa UIN SUSKA Riau*, Pekanbaru. 2012.
- Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag, New York. 1990.
- Zaman, Gul, dkk. Modeling Dynamical Interactions between Leptospirosis Infected Vector and Human Population, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, 2012.